

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ ΠΙΣΤΩΤΙΚΟΥ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΤΥΠΟΥ MERTON (1974) ΚΑΙ Η ΠΡΟΒΛΕΠΤΙΚΗ ΤΟΥΣ ΙΚΑΝΟΤΗΤΑ ΩΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΕΓΚΑΙΡΗΣ ΠΡΟΕΙΔΟΠΟΙΗΣΗΣ

ΔΡ ΓΕΩΡΓΙΟΥ Α. ΧΡΙΣΤΟΔΟΥΛΑΚΗ*

Συμβούλου Διοίκησης, Τράπεζα της Ελλάδος

Το ενδεχόμενο αθέτησης οικονομικής υποχρέωσης σε μια συναλλαγή αποτελεί βασικό συστατικό στοιχείο στη διαδικασία λήψης οικονομικών αποφάσεων. Ο πιστωτικός αυτός κίνδυνος που αναλαμβάνει ο δανειστής, μπορεί να εκφραστεί διαισθητικά και ποσοτικά με την *πιθανότητα αθέτησης - probability of default* (PD) της οικονομικής υποχρέωσης κατά τη λήξη της. Εκ των πραγμάτων η λήψη ορθολογικών οικονομικών αποφάσεων στο παρόν γίνεται σε σχέση με τις μελλοντικές εξελίξεις, κατά συνέπεια η πιθανότητα αθέτησης θα πρέπει να αντανακλά αυτή τη διάσταση. Ετσι, ουσιαστικό στοιχείο εισροής σε οποιαδήποτε εμπειριστατωμένη μελέτη πιστοληπτικής ικανότητας, διαβάθμισης και κεφαλαιακής επάρκειας, αποτελεί η πρόβλεψη αυτής της μελλοντικής ποσότητας, καθώς και η δυνατότητα αξιολόγησης της προβλεπτικής ικανότητας. Η βιβλιογραφία προσφέρει πολλές εναλλακτικές επιστημονικές μεθοδολογίες προερχόμενες από την οικονομετρία, την επιχειρησιακή έρευνα, την υπολογιστική επιστήμη και τη μαθηματική οικονομική της χρηματοδότησης. Στο

παρόν άρθρο θα αναλύσουμε την τελευταία κατηγορία, η οποία βασίζεται στη μαθηματική οικονομική θεωρία τιμολόγησης των Δικαιωμάτων Προαίρεσης (options), όπως αυτή θεμελιώθηκε από τους Black και Scholes (1973) και Merton (1974) και αναπτύχθηκε αργότερα από πληθώρα ερευνητών.

Ουσιαστικό κίνητρο αποτελεί τόσο η δομική μορφή του υποδείγματος και η χρήση τιμών της αγοράς ως εισροές, όσο και οι πολλά υποσχόμενες εμπειρικές ενδείξεις ισχυρής προβλεπτικής ικανότητας. Η πλέον δημοφιλής εμπορικά εφαρμογή αυτής της μεθοδολογίας είναι το σύστημα που αναπτύχθηκε από τη Moody's KMV.

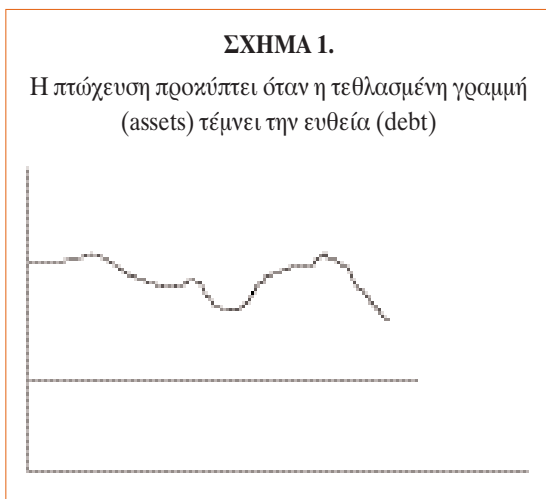
Το υπόδειγμα και η εφαρμογή πρόβλεψης αθέτησης κατά Merton (1974)

Η θεμελιώδης μελέτη του Merton (1974) εισάγει για πρώτη φορά την ερμηνεία της μετοχής (Equity Stock) μιας επιχείρησης ως ένα απλό δικαίωμα προαίρεσης (European call option) των μετόχων πάνω στα περιουσιακά στοιχεία της επιχείρησης (Assets), με τιμή εξάσκησης (Exercise Price) και χρόνο λήξης (maturity date) ίσα με την ονομαστική αξία (Debt face value) και χρόνο ωρίμανσης των

* Οι απόψεις στο παρόν άρθρο αντανακλούν αυτές του συγγραφέα και σε κανένα μέρος τους δε θα πρέπει να αποδοθούν στην Τράπεζα της Ελλάδος.

υποχρεώσεών της αντίστοιχα. Οι πιστωτές της εταιρείας απολαμβάνουν προτεραιότητα στην παρουσία της σε σχέση με τους μετόχους. Κατά συνέπεια, όταν η αξία της εταιρείας υπερβαίνει την αξία του χρέους κατά το χρόνο ωρίμανσης, οι μέτοχοι μπορούν να εξασκήσουν το δικαίωμα προαίρεσης και να ικανοποιήσουν τις απαιτήσεις των πιστωτών και η διαφορά αντανακλά την αξία των μετοχών. Στην περίπτωση που η αξία της εταιρείας υπολείπεται του χρέους, οι μέτοχοι δεν θα ασκήσουν το δικαίωμα προαίρεσης, οπότε η επιχείρηση ουσιαστικά περνάει στους πιστωτές, ενώ οι μετοχές έχουν μηδαμινή ή μηδενική αξία.

Το υπόδειγμα υποθέτει μία απλοϊκή κεφαλαιακή δομή του τύπου $Assets = Debt + Equity$, όπου η αξία των $Assets$, V , της εταιρείας διακυμαίνεται σε συνεχή χρόνο ως $dV_t = (\mu - \lambda)V_t dt + \sigma V_t dW_t$, όπου W είναι μια standard Weiner διαδικασία και μ , λ , σ είναι σταθερές παράμετροι του μέσου και της διακύμανσης της διαδικασίας. Η μεταβλητή V αποτελεί τη μοναδική πηγή κινδύνου στην κεφαλαιακή δομή του συγκεκριμένου υποδείγματος. Σε αυτά τα πλαίσια, η εταιρική αθέτηση συμβαίνει όταν η αξία των περιουσιακών στοιχείων της εταιρείας υπολείπεται της αξίας των υποχρεώσεών της, και το υπόδειγμα Merton προβλέπει αύξηση της πιθανότητας αθέτησης καθώς οι δύο μεταβλητές συγκλίνουν (σχήμα 1).



Βάσει των θεωρητικών υποθέσεων του υποδείγματος, μπορούμε να αποδείξουμε ότι η πιθανότητα εταιρικής αθέτησης δίνεται από

$$PD = N\left(-\frac{\ln\left(\frac{V_0}{\text{Default Point}}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

όπου $N(\cdot)$ είναι σωρευτική συνάρτηση πιθανότητας της κανονικής κατανομής, T , r , και V_0 , χρόνος ωρίμανσης, το χωρίς κίνδυνο επιτόκιο και η αρχική αξία των περιουσιακών στοιχείων της εταιρείας αντίστοιχα. Το στοιχείο Default Point θα μπορούσε να είναι ίσο με το χρέος της εταιρείας ή συνάρτηση αυτού ανάλογα με τις εμπειρικές ιδιότητες των δεδομένων. Προκειμένου να αποκτήσει λειτουργική αξία η παραπάνω εξίσωση, θα πρέπει να εκτιμηθούν οι τιμές των δύο μη παρατηρούμενων μεταβλητών της σχέσης, V_0 και σ . Αυτό μπορεί να πραγματοποιηθεί με ποικίλους τρόπους, όπως με τη μέθοδο της Μέγιστης Πιθανοφάνειας (Maximum Likelihood) του Duan et al. (2003) ή λύνοντας ένα σύστημα δύο ταυτόχρονων αλλά μη γραμμικών εξισώσεων. Ο πρώτος τρόπος αποδίδει πιθανόν εκτιμήσεις με επιθυμητές ασυμπτωτικές ιδιότητες, αλλά απαιτεί σημαντική επένδυση χρόνου, ενώ ο δεύτερος υπόκειται στους κινδύνους αριθμητικών μεθόδων επίλυσης, οι οποίες όμως είναι δυνατό να εφαρμοστούν εντός λίγων λεπτών σε μία υπολογιστική πλατφόρμα τύπου gauss ή matlab. Το προς επίλυση μη γραμμικό σύστημα αποτελείται από (1) την εξίσωση τιμολόγησης της μετοχής της εταιρείας E_0 (European call option on the assets) και (2) ένα μετασχηματισμό της μέσω του Ito's Lemma με μορφή

$$\sigma_E E = N(d)\sigma V_0$$

όπου

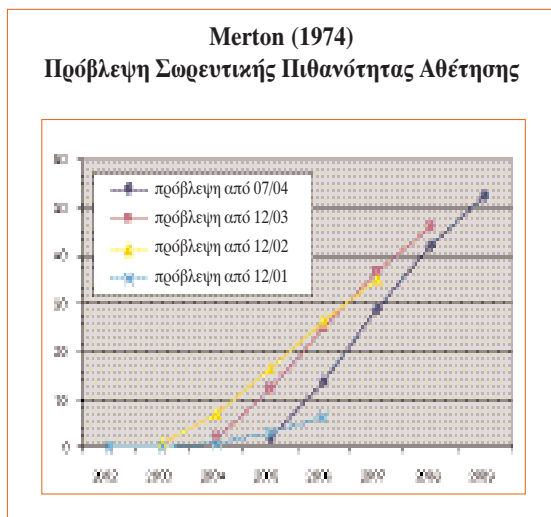
$$d = -\frac{\ln\left(\frac{V_0}{\text{Default Point}}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

Παρατηρήστε ότι η δεύτερη εξίσωση εξαρτάται και από τη διακύμανση σ_E της μετοχής, η οποία όμως μπορεί να εκτιμηθεί από ιστορικά δεδομένα.

Ως εμπειρικό παράδειγμα, θεωρήστε τα δεδομένα μιας πραγματικής εταιρείας από το ΧΑΑ στον πίνακα 1.

ΠΙΝΑΚΑΣ 1				
Ετος	7/04	2003	2002	2001
Χρηματιστηριακή Αξία, εκ. €	54	138	143	452
Υποχρεώσεις εκ. €		129	100	19
Τυπική απόκλιση σε ετήσια βάση	54	63	58	66

Η εφαρμογή του υποδείγματος Merton (1974) για τέσσερα χρόνια διαδοχικά και για μέχρι πέντε περιόδους πρόβλεψης, απέδωσε εκτιμήσεις, όπως παρουσιάζονται στο γράφημα 1.



Οι προβλέψεις αυτές για την πιθανότητα πτώχευσης της εταιρείας μπορούν να ερμηνευτούν ως εκτιμήσεις της αγοράς, υπό τη συνθήκη των ατελειών του υποδείγματος. Αποτελούν γνήσιες προβλέψεις “εκτός δείγματος”, ενώ η προβλεπτική ικανότητα του υποδείγματος έχει θεμελιωθεί με πολλές

εμπειρικές μελέτες, για παράδειγμα οι Hillegeist et al (2004) αναφέρουν ότι οι συναγόμενες πιθανότητες αθέτησης από το υπόδειγμα Merton παρέχουν μέχρι και 14 φορές περισσότερη πληροφορία σε σχέση με μεθόδους βασισμένες σε λογιστικά στοιχεία.

Κριτική στο υπόδειγμα Merton (1974)

Πέραν της θεμελιωμένης ικανότητας πληροφόρησης, το υπόδειγμα Merton συγκεντρώνει αρκετές ατέλειες και γι’ αυτό υπόκειται σε εντατική κριτική. Υποθέτει μια απλή κεφαλαιακή δομή, που συχνά δεν ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα. Επίσης η ερμηνεία της μετοχής ως απλού call option συνεπάγεται ότι η τιμή της θα είναι αύξουσα συνάρτηση της διακύμανσής της. Κατά συνέπεια ένας διαχειριστής της εταιρείας με στόχο τη μεγιστοποίηση της μετοχικής αξίας θα τείνει να επιλέγει χωρίς όριο τα πλέον επικίνδυνα επενδυτικά σχέδια, πράγμα το οποίο είναι ανορθολογικό. Επίσης το υπόδειγμα επιτρέπει την ύπαρξη χρεοκοπίας μόνο κατά την ωρίμανση και για το ποσό του χρέους, ενώ η εμπειρία διδάσκει ότι μπορεί να προκύψει πριν, κατά ή μετά την ωρίμανση του χρέους. Το υπόδειγμα επίσης υποθέτει ότι η αξία των assets ακολουθεί την κανονική κατανομή, γεγονός που δεν υποστηρίζεται από εμπειρικές ενδείξεις, οι οποίες καταδεικνύουν την ύπαρξη τόσο ασυμμετρίας όσο και υπερβάλλουσας κύρτωσης. Τέλος θα πρέπει να τονίσουμε ότι το υπόδειγμα υποθέτει μια αποτελεσματική αγορά κεφαλαίου. Τυχόν αναποτελεσματικότητα της αγοράς στην τιμολόγηση των μετοχών, αντανακλάται άμεσα στις συναγόμενες πιθανότητες αθέτησης.

Σε κάθε περίπτωση, παρά την πληθώρα ατελειών που δημιουργούν μεροληψίες στις συναγόμενες εκτιμήσεις, υπάρχουν πολύ ενθαρρυντικές εμπειρικές ενδείξεις για την προβλεπτική ικανότητα του υποδείγματος σε σχέση με ανταγωνιστικές μεθόδους. Σε αυτή τη βάση η μέθοδος εξελίσσεται ώστε να αυξήσει την αποτελεσματικότητά της.

Μετεξελίξεις της μεθόδου

Όπως αναλύθηκε πιο πάνω, παρά την προβλεπτική του ικανότητα, το υπόδειγμα Merton (1974) έχει σημαντικές αδέλειες, οι οποίες μπορούν να οδηγήσουν σε υπο- ή υπερ-πρόβλεψη της πιθανότητας αθέτησης. Ένας τρόπος να επιτρέψουμε τη δυνατότητα “πρώρης αθέτησης”, δηλαδή πριν την ωρίμανση του εταιρικού χρέους, καθώς επίσης και πεπερασμένες επιλογές κινδύνου, είναι να ερμηνεύσουμε τη μετοχή της εταιρείας σαν ένα Barrier Call Option. Συγκεκριμένα σαν ένα down-and-out Barrier Call Option. Σε αυτή την περίπτωση η εταιρεία χρεοκοπεί (και το δικαίωμα προαίρεσης έχει μηδενική αξία), εάν η αξία των υποκείμενων περιουσιακών στοιχείων υπολείπεται μιας τιμής κατωφλίου (barrier), η οποία διαφέρει από την αξία των υποχρεώσεων (τιμή εξάσκησης του δικαιώματος). Στην περίπτωση που η τιμή κατωφλίου είναι μεγαλύτερη από την αξία των υποχρεώσεων, προκύπτει η πιθανότητα πρώρης αθέτησης, όπου

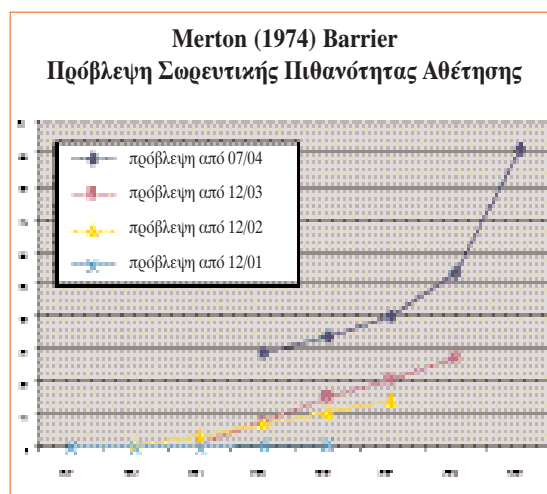
$$PD = \Pr(\text{Asset Value} < \text{Barrier})$$

Στην αντίθετη περίπτωση προκύπτει η πιθανότητα αθέτησης μετά την ωρίμανση των υποχρεώσεων της εταιρείας, όπου

$$PD = \Pr(\text{Asset Value} < \text{Barrier}) + \Pr(\text{Asset Value} < \text{Debt})$$

Η ευέλικτη αυτή διαδικασία θα μπορούσε επίσης να αντανάκλα την ύπαρξη μιας ευέλικτης κεφαλαιακής δομής με callable liabilities. Η εμπειρική εφαρμογή του υποδείγματος από τους Brockman & Turtle (2003) έδωσε ιδιαίτερα ικανοποιητικά αποτελέσματα σε σχέση με άλλες ανταγωνιστικές μεθόδους. Επίσης μια μετεξέλιξη του υποδείγματος, Christodoulakis (2004), εισάγει περαιτέρω ευελιξία θεωρώντας την τιμή κατωφλίου ως μια επιπλέον

(προς εκτίμηση) μη παρατηρούμενη μεταβλητή του συστήματος. Αν και αριθμητικά πιο περίπλοκο, αφού αυξάνει τον αριθμό των προς επίλυση εξισώσεων, το υπόδειγμα απέδωσε πολύ ικανοποιητικά εμπειρικά αποτελέσματα. Η εφαρμογή της μεθόδου στα δεδομένα του πίνακα 1 απέδωσε τα ακόλουθα αποτελέσματα:



Ο αναγνώστης θα μπορούσε να παρατηρήσει την αυξημένη ευαισθησία του υποδείγματος στις προβλέψεις από το 2004 σε σχέση με το απλό υπόδειγμα Merton.

Οι κατευθύνσεις που ένας ερευνητής θα μπορούσε να ακολουθήσει ώστε να βελτιώσει την αποτελεσματικότητα της μεθόδου Merton, αντανάκλουν ουσιαστικά κάθε πτυχή της κριτικής που ασκήθηκε στην παράγραφο 3 του παρόντος άρθρου. Επιπλέον μεταβολές στον ορισμό και τη δομή του υποτιθέμενου call option θα μπορούσαν κάλλιστα να αντανάκλουν τα στοιχεία της μικροδομής της αγοράς κεφαλαίων, στην οποία διαπραγματεύεται η μετοχή της εκάστοτε εταιρείας, προσδίδοντας έτσι περαιτέρω ευελιξία της μεθόδου σε σχέση με τις ρεαλιστικές συνθήκες. Τέλος μια σημαντική παράμετρος που σκόπιμα παραλείψαμε να συζητήσουμε, αποτελεί η εξάρτηση μεταξύ των πιθανοτήτων αθέτησης διαφορετικών οικονομικών μονάδων, η οποία δύναται να διαφοροποιήσει δρα-

ματικά το προφίλ του συστημικού κινδύνου. Πρόκειται για ένα ενδιαφέρον και ευρύτατο θέμα, στο οποίο θα αφιερώσουμε ένα μελλοντικό άρθρο.

Η εποπτική διαδικασία

Η εποπτεία του χρηματοπιστωτικού συστήματος αποτελεί μία σύνθετη διαδικασία για τις αρχές, στην οποία η ευστάθεια και αποτελεσματικότητα του συστήματος αποτελούν κεντρικούς άξονες, ώστε τελικά να προωθείται η κοινωνική ευημερία. Σε αυτή τη διαδικασία η πρόβλεψη της πιθανότητας κακών ενδεχομένων, όπως επίσης και η εκτίμηση της ευστάθειας και ελαστικότητας υποσυστημάτων ή και οικονομικών μονάδων σε ισχυρές δονήσεις αποτελούν ουσιαστικές εισροές στη διαδικασία λήψης αποφάσεων, σχεδιασμού πολιτικής και ρυθμίσεων, καθώς και αξιολόγησης συστημάτων διαχείρισης κινδύνων και κεφαλαιακής επάρκειας πιστωτικών ιδρυμάτων. Σε αυτά τα πλαίσια η Τράπεζα της Ελλάδος, όπως και άλλες κεντρικές τράπεζες και εποπτικές αρχές, εφαρμόζει αλλά και αναπτύσσει νέα υποδείγματα, συμπεριλαμβανομένου και του τύπου Merton, προκειμένου να χρησιμοποιούνται και ως συστήματα έγκαιρης προειδοποίησης, αλλά και ως εργαλεία αξιολόγησης συστημάτων, πάντοτε σε συνδυασμό με την ανθρώπινη κρίση και εμπειρία.

Συμπερασματικές παρατηρήσεις

Τα δομικά υποδείγματα τύπου Merton (1974) και οι μετεξελίξεις αυτών αποτελούν μια από τις κύριες κατηγορίες υποδειγμάτων πιστωτικού κινδύνου. Σειρά από εμπειριστωμένες εμπειρικές μελέτες αξιολόγησης καταδεικνύουν μια υπό συνθήκη ανώτερη προβλεπτική ικανότητα σε σχέση με εναλλακτικές μεθόδους. Συγκεκριμένα, τα αποτελέσματα αυτά ισχύουν μόνο για τα δεδομένα στατιστικά δείγματα, τα οποία χρησιμοποιήθηκαν και εφόσον

τα κριτήρια αξιολόγησης λειτουργούν αξιόπιστα σε κάθε εφαρμογή. Η τελευταία παρατήρηση ανοίγει το σημαντικό θέμα της αξιοπιστίας των μεθόδων αξιολόγησης των υποδειγμάτων πιστωτικού κινδύνου (model validation), στο οποίο θα αναφερθούμε σε μελλοντικό άρθρο.

Οι προβλέψεις πιθανοτήτων αθέτησης από υποδείγματα τύπου Merton έχουν το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό ότι αντανακλούν τις εκτιμήσεις της αγοράς (και την εξέλιξή τους), όπως αυτές αποτυπώνονται στην αξία των μετοχών ή και των υποχρεώσεων της εταιρείας. Επίσης αυτή η κατηγορία υποδειγμάτων είναι ανοικτή σε τροποποιήσεις τόσο τεχνικού όσο και θεσμικού χαρακτήρα. Υπάρχει ωστόσο ισχυρή εξάρτηση από την ύπαρξη αποτελεσματικής αγοράς.

Για τους σκοπούς του υπολογισμού αναμενόμενης ζημιάς (expected loss), υπάρχει ανάγκη αμερόληπτης πρόβλεψης. Ο κίνδυνος συστηματικής μεροληψίας (υπο- ή υπερ-πρόβλεψης) από οποιοδήποτε υπόδειγμα είναι υπαρκτός, η συνήθης πρακτική στις εφαρμογές είναι η εκ των υστέρων (ex-post) ευθυγράμμιση των προβλέψεων με τον ιστορικά μακροχρόνιο μέσο όρο. Η διαδικασία αυτή δεν είναι απόλυτα δόκιμη, καθώς ένα υπόδειγμα θα πρέπει ενδογενώς να είναι αμερόληπτο και να υποστεί τις κατάλληλες βελτιώσεις.

Για τους σκοπούς της έγκαιρης προειδοποίησης, ιδιαίτερη σημασία έχει ο τρόπος μεταβολής της πρόβλεψης. Συγκεκριμένα η ταχύτητα απόκρισης της προβλεπόμενης πιθανότητας στις μεταβαλλόμενες συνθήκες της αγοράς, όπως τα επίπεδα τιμών, μεταβλητότητας και εξάρτησης. Υπάρχουν σοβαρές εμπειρικές ενδείξεις ότι οι συναγόμενες προβλέψεις από υποδείγματα τύπου Merton ανταποκρίνονται πολύ ικανοποιητικά.

Σε κάθε περίπτωση τα αποτελέσματα οποιουδήποτε υποδείγματος πρέπει να υποστούν πολλαπλή αξιολόγηση και να συνδυαστούν με την ανθρώπινη κρίση και εμπειρία και πιθανόν με εναλλακτικές μεθόδους.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Black F. and M Scholes (1973), “The Pricing of Options and Corporate Liabilities”, *Journal of Political Economy*, Vol. 81, pp 637-659.

Brockman P. and H. J. Turtle (2003), “A Barrier Option Framework for Corporate Security Valuation”, *Journal of Financial Economics*, Vol. 67, pp 511-529.

Christodoulakis G. A. (2004), “A Credit Risk Framework with Flexible Default Structure”, mimeo, Bank of Greece.

Duan J.C., G. Gauthier, J.G. Simonato and S. Zaanoun (2003), “Estimating Merton’s Model by Maximum

Likelihood with Survivorship Consideration”, *Working Paper, University of Toronto*.

Hillegeist S. A., E. K. Keating, D. P. Cram and K. G. Lundstedt (2004), “Assessing the Probability of Bankruptcy”, *Review of Accounting Studies*, Vol. 9, 5-34.

Merton R (1974), “On the Pricing of Corporate Debt: the risk structure of interest rates”, *Journal of Finance*, Vol. 29, pp 449-470.

